

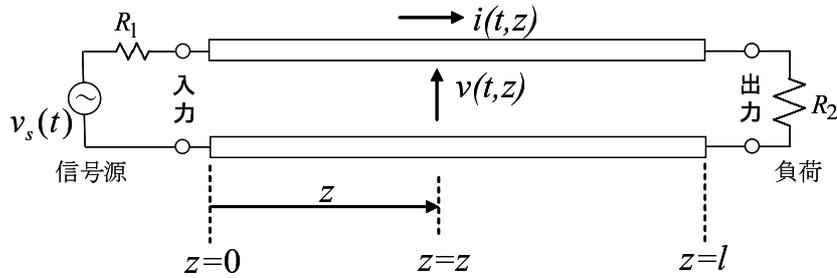
# 1.1 伝送線路のFDTD解析

## 1 目的

高周波信号や高速デジタル信号を線路で伝送する様子を解析するには、伝送線路を微小な  $L$  と  $C$  が分布的に付加された回路として考える必要がある。その有効な解析手法として有限差分時間領域法 (Finite-Difference Time-Domain Method, FDTD法) がある。FDTD法の原理とアルゴリズムを理解することを目的として、1次元伝送路におけるパルス電圧・電流の伝搬を解析する。FDTD法を理解することにより、2次元平面回路や3次元アンテナなどの複雑な構造の解析や設計に発展させることもできる。

## 2 分布定数線路

伝送線路に沿った信号 (電圧  $v[V]$  と電流  $i[A]$ ) の伝搬を考える。2線式伝送線路を図1に、その微小区間および両端の等価回路を図2に示す。



$v_s(t)$ : 信号源電圧;  $R_1$ : 信号源内部抵抗;  $R_2$ : 負荷抵抗

図 1: 2線式伝送線路

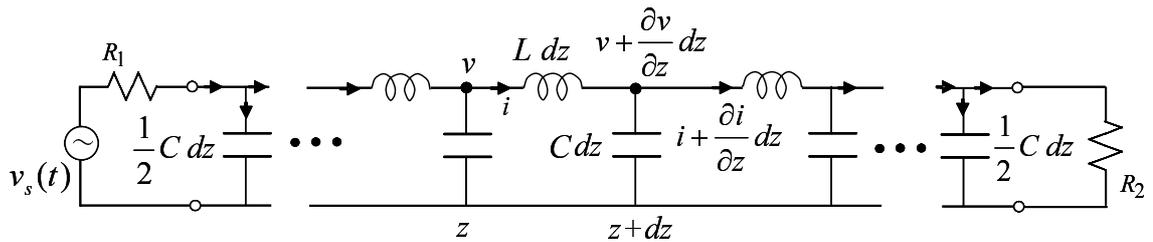


図 2: 図 1 の線路の微小区間および両端に対する等価回路

線路の特性は単位長さ当りのインダクタンス  $L[H/m]$  と単位長さ当りのキャパシタンス  $C[F/m]$  で決まり、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \quad (1)$$

は特性インピーダンスと呼ばれる。また、

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [m/s] \quad (2)$$

は信号の伝搬速度である。図2の微小区間にキルヒホッフの電流則、電圧則を適用すると、次の微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad (3)$$

これは電信方程式ともよばれる。図2で両端のキャパシタンスが中間のCの半値である。なぜなら、図2の線路を区間毎に分離すると図3に示す等価回路となるからである。このように分離された1単位をセルと呼ぶ。

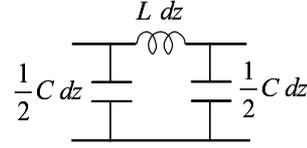


図 3: 1セル分の等価回路

### 3 FDTD法を用いた伝送線路の信号(電圧・電流)伝搬解析

#### 3.1 FDTD法の原理

連立方程式(3)を数値的に解析するために、時間と空間を離散化する。連続時間 $t$ を離散時間 $n$ に置き換えると $t = n\Delta t$ になる。 $\Delta t$ は時間ステップ、 $n$ は時間ステップ数を表す。同様に空間軸も離散空間 $k$ に置き換えると $z = k\Delta z$ となり、 $\Delta z$ は空間ステップを表す。 $k$ は $z$ を離散化したときの空間ステップ数、すなわち $v$ や $i$ のサンプル点は何番目であるかを表す。 $v(n\Delta t, k\Delta z)$ ,  $i(n\Delta t, k\Delta z)$ を簡単のため $v_k^n$ ,  $i_k^n$ と表示する(式4)。

$$\begin{cases} v(t, z) = v(n\Delta t, k\Delta z) \rightarrow v_k^n & (4a) \\ i(t, z) = i(n\Delta t, k\Delta z) \rightarrow i_k^n & (4b) \end{cases}$$

電圧 $v$ については図2の各キャパシタの位置、すなわち、整数値 $\times \Delta z$ の位置で観測する。一方、電流 $i$ については図2の各インダクタの中心、すなわち、(整数値 + 0.5)  $\times \Delta z$ の位置で観測する。さらに $n$ についても $k$ と同様に考える。この要領で電信方程式(3)を差分近似すると

$$\begin{cases} \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta z} = -L \frac{i_{k+0.5}^{n+0.5} - i_{k+0.5}^{n-0.5}}{\Delta t} & (5a) \\ \frac{i_{k+0.5}^{n+0.5} - i_{k-0.5}^{n+0.5}}{\Delta z} = -C \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} & (5b) \end{cases}$$

となる。この連立差分方程式から $v$ と $i$ を交互に求める。この計算をするため、上式を漸化式

$$\begin{cases} i_{k+0.5}^{n+0.5} = i_{k+0.5}^{n-0.5} - \frac{\Delta t}{L} \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta z} & (6a) \\ v_k^{n+1} = v_k^n - \frac{\Delta t}{C} \frac{i_{k+0.5}^{n+0.5} - i_{k-0.5}^{n+0.5}}{\Delta z} & (6b) \end{cases}$$

に書き換える。図4に示すように漸化式(6a), (6b)を交互に繰り返すことにより逐次的に全時空間

での  $v$  と  $i$  が計算できる。解析に必要な初期条件, 終端条件及び全体の時空間領域配置を図5に示す。 $v$  と  $i$  が時間的にも空間的にもお互いに0.5ステップずつずれている。これがFDTD法の特徴である。

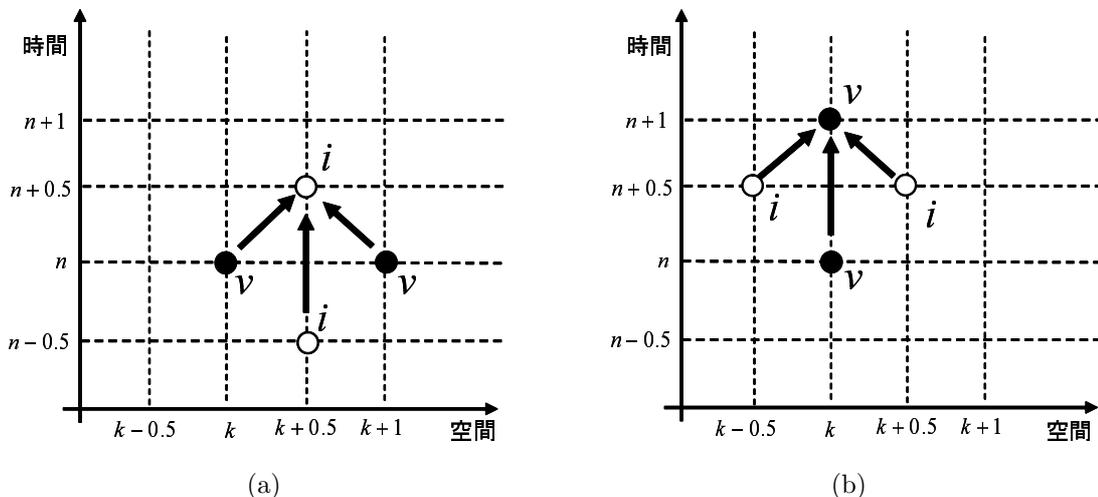


図4: (a) 式(6a)で電流を計算する際の時空間配置; (b) 式(6b)で電圧を計算する際の時空間配置; ○は電流, ●は電圧を表す

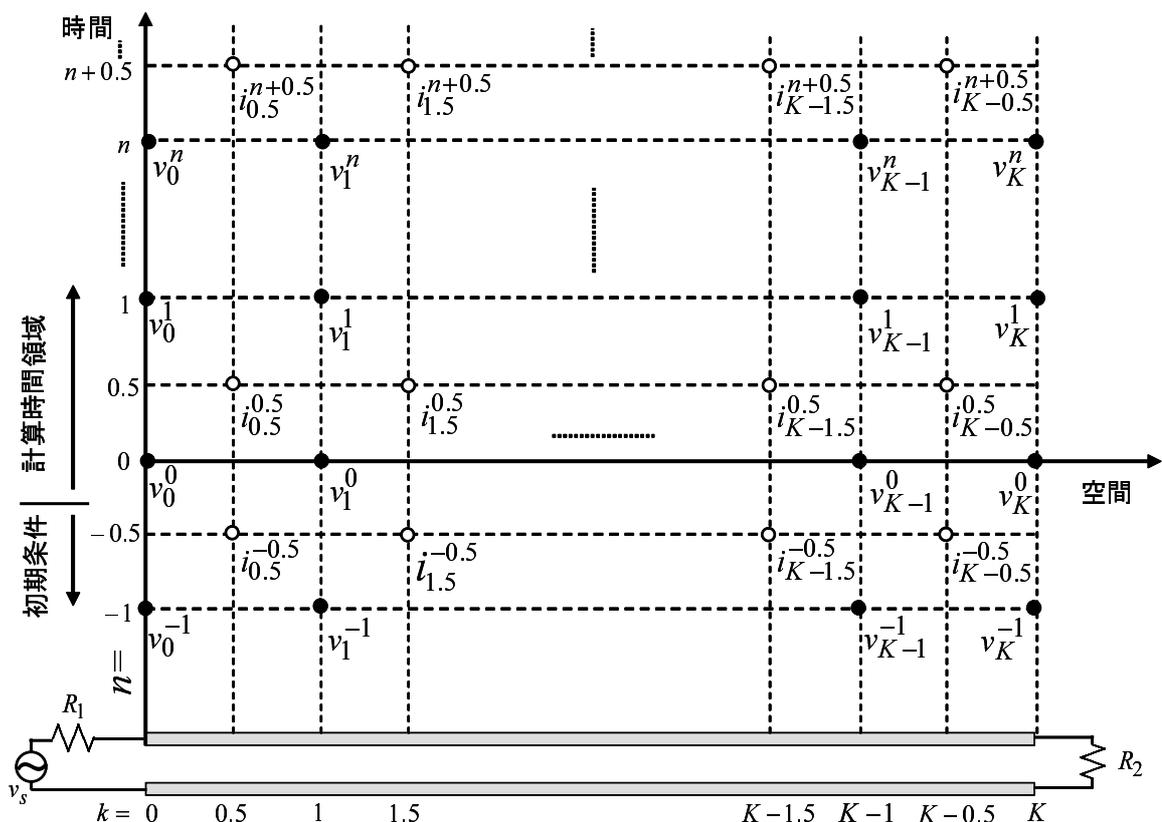


図5: 電圧と電流を初期設定及び逐次計算する時空間配置

### 3.2 初期条件

$t < 0$  では  $v(t, z)$ ,  $i(t, z)$  はすべての  $z$  で零とする。すなわち, 図5に示す  $n = -1$  での  $v$  と  $n = -0.5$  での  $i$  の値を全ての位置  $z$  で零とする。つまり

$$v_k^{-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K) \quad (7)$$

$$i_k^{-0.5} = 0 \quad (k = 0.5, 1.5, 2.5, \dots, K - 0.5) \quad (8)$$

とする。

### 3.3 終端条件

伝送路入力端子に開放電圧  $v_s(t)$  [V], 内部抵抗  $R_1$  [ $\Omega$ ] の信号源を接続するので  $z = 0$  における入力電圧  $v(t, 0)$  は

$$v(t, 0) = v_s(t) - R_1 i(t, 0) \quad (9)$$

となる。これを離散化すると

$$v_0^{n-0.5} = v_s^{n-0.5} - R_1 i_0^{n-0.5} \quad (10)$$

となる。この左辺の電圧は観測点より  $0.5\Delta t$  ずれているので

$$v_0^{n-0.5} = \frac{v_0^{n-1} + v_0^n}{2} \quad (11)$$

の近似を用いる。図2の左端にキルヒホッフの電流則を適用すると

$$i_0^{n-0.5} = \frac{C\Delta z}{2} \frac{v_0^n - v_0^{n-1}}{\Delta t} + i_0^{n-0.5} \quad (12)$$

を得る。式(10)(11)(12) から  $v_0^{n-0.5}$  と  $i_0^{n-0.5}$  を消去すると式(13)を得る。

$$v_0^n = \frac{(R_1 C \Delta z - \Delta t) v_0^{n-1} + 2\Delta t (v_s^{n-0.5} - R_1 i_0^{n-0.5})}{R_1 C \Delta z + \Delta t} \quad (13)$$

ここで  $v_s^{n-0.5} = v_s((n-0.5)\Delta t)$  である。一方, 出力端子  $z = l = K\Delta z$  においても同様に終端条件を導けば式(14)を得る。

$$v_K^n = \frac{(R_2 C \Delta z - \Delta t) v_K^{n-1} + 2R_2 \Delta t i_{K-0.5}^{n-0.5}}{R_2 C \Delta z + \Delta t} \quad (14)$$

左端条件式(13)と右端条件式(14)の違いは信号源の有無である。また, 左端と右端で電流を定義する方向が逆向きであるので分子末項の負号が異なっていることにも注意すること。

[課題 1]

図 5 に示す伝送線路にて, 信号源電圧  $v_s(t)$  として 3 乗正弦パルス

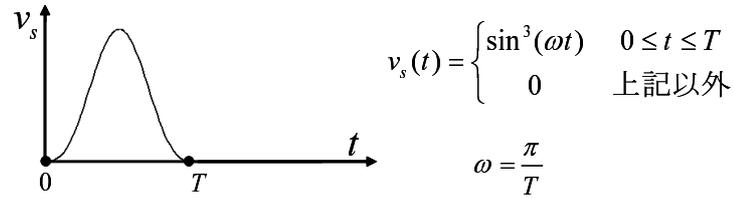


図 6: 3 乗正弦パルス

を考える。入力端における電圧  $v(t, 0)$  および出力端における  $v(t, K\Delta z)$  を求めて横軸  $t$  として  $0 \leq t \leq 10T$  の範囲でプロットせよ。また横軸を  $z$  としてパルスが伝わる様子を動画にせよ。ただし,  $T = 100\text{psec}$ ,  $\omega = 2\pi \times 5\text{ G rad/sec}$ ,  $\Delta z = 0.3\text{ mm}$ ,  $\Delta t = 1\text{ psec}$  に固定し,  $R_1, R_2$  が  $R_1 = R_2 = 50\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 250\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 10\Omega$  の 3 通り, 伝送路の長さ  $l = 12\text{ cm}$ , 特性インピーダンス  $Z_0 = 50\Omega$ , 信号の伝播速度  $v_p = 3 \times 10^8\text{m/sec}$  とする。

[課題 2]

課題 1 と同じ信号源と線路において, 終端を  $R_1 = R_2 = 50\Omega$  に固定した時,  $\Delta z$  と  $\Delta t$  の値を  $0.1\text{mm} \leq \Delta z \leq 10\text{mm}$ ,  $0.1\text{psec} \leq \Delta t \leq 100\text{psec}$  の範囲で様々に変えて, 入力端と出力端における信号パルス時間形状がどのように計算されるかプロットし, その結果を考察せよ。計算誤差を

$$\epsilon = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=0}^{10N} [v_0^n - v_K^{n+M}]^2}{\sum_{n=0}^N [v_s^n]^2} \quad \begin{cases} M = \frac{l}{v_p \Delta t} \\ N = \frac{T}{\Delta t} \end{cases} \quad (15)$$

で定義する。 $\Delta z$  をパラメータ,  $\Delta t$  を横軸,  $\epsilon$  を縦軸としてプロットせよ。この結果に基づいて, 各  $\Delta z$  において  $\epsilon$  が最小となる  $\Delta t$  を  $\Delta z - \Delta t$  平面上にプロットせよ。

[課題 3]

$R_1 = 50\Omega$ ,  $R_2 = 100\Omega$ ,  $T = 100\text{psec}$  のとき負荷  $R_2$  に供給される信号エネルギー  $U$  を次式で定義する。

$$U = \int_0^{10T} v(t, l) i(t, l) dt = \sum_{n=0}^{10N} v_K^n i_K^n \Delta t, \quad N = \frac{T}{\Delta t} \quad (16)$$

$Z_0$  を横軸 ( $50\Omega \leq Z_0 \leq 100\Omega$ ),  $U$  を縦軸としてプロットせよ。 $U$  が最大になるような  $Z_0[\Omega]$  を探索せよ。ただし, 伝送線路長  $l$  を  $l = 15\text{mm}$  とする。